

# Samenvatting

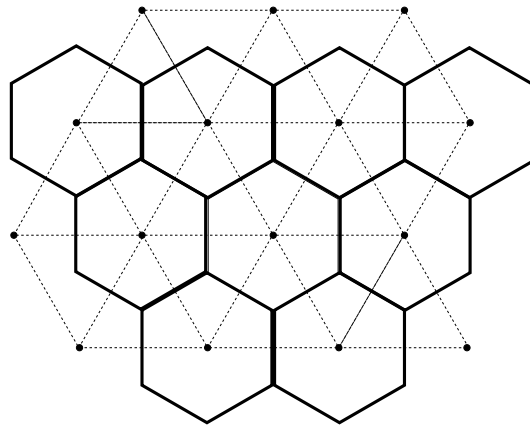
## Toevalsfractals en schalingslimieten in percolatie

De titel van dit proefschrift is *Random fractals and scaling limits in percolation*. Vermoedelijk werpt deze titel geen (of anders een heel zwak) licht op de wiskundige inhoud voor de meeste Nederlandstalige lezers. Daarom zal ik hieronder in zo begrijpelijk mogelijk Nederlands uitleggen waar mijn proefschrift over gaat.

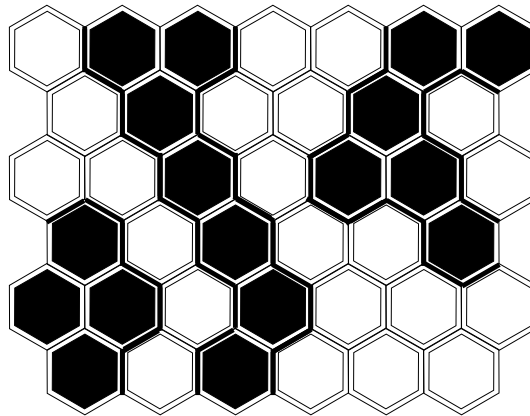
Laten we beginnen met het introduceren van de hoofdrolspeler van dit proefschrift: percolatie. Beschouw het driehoeksrooster in het platte vlak, zie Figuur 6.4 voor een illustratie van dit rooster. Merk op dat ieder punt in het driehoeksrooster correspondeert met een zeshoekig vlak uit het “honingraatrooster”. Om de visualisatie van het model te vergemakkelijken werken we in deze samenvatting alleen met hexagons uit het honingraatrooster.

Voor iedere hexagon gooien we een munt (waarbij de kans  $p$  is dat kop bovenkomt): bij kop kleuren we de hexagon zwart, bij munt wit, onafhankelijk van de kleur van andere hexagons. Als we nu alle buurhexagons met dezelfde kleur verbinden krijgen we zwarte en witte clusters van hexagons. In Hoofdstuk 3 bekijken we het gedrag van de grenzen tussen zwarte en witte clusters. Deze grenzen vormen een curve, zie Figuur 6.5 voor enkele voorbeelden van zulke curves. In het Engels worden deze curves interface curves genoemd en bij gebrek aan een goede Nederlandse vertaling zal ik deze term hier ook gebruiken.

Vanuit een wis- en natuurkundig standpunt is de schalingslimiet van percolatie heel interessant. Onder schalingslimiet verstaan we het gedrag van een



Figuur 6.4: Het driehoeksrooster. De vetgedrukte punten vorm de punten van het driehoeksrooster en zijn met elkaar verbonden via de gestippelde lijnen. Ieder punt van het driehoeksrooster is het middelpunt van een hexagon. Deze hexagons vormen het honingraatrooster.



Figuur 6.5: Voorbeeld van percolatie met parameter  $p = 1/2$ . Hexagons worden zwart gekleurd met kans  $1/2$  en wit met kans  $1/2$ , onafhankelijk van andere hexagons. De dikke lijnen tussen zwarte en witte clusters zijn de interface curves.

(nog nader te bepalen) object uit het percolatiemodel wanneer we de grootte van de hexagons naar nul sturen. Voor dit object zijn vele keuzes mogelijk en

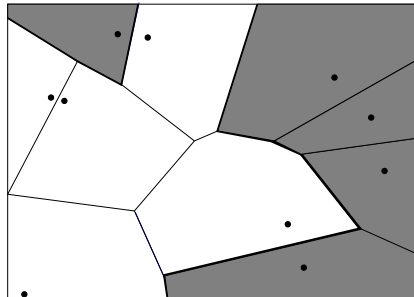
iedere keuze heeft zo zijn voor- en nadelen: we willen zo veel mogelijk informatie hebben over het percolatiemodel, maar het object moet ook niet te veel informatie bevatten, want dan wordt het wiskundig onbeheersbaar. Wij kiezen ervoor om de kansverdeling van interface curves als uitgangspunt te nemen. In Hoofdstuk 2 zetten we het wiskundig geraamte van kansverdelingen van interface curves op. Voor dit hoofdstuk geldt helaas een negatief leesadvies voor niet-wiskundigen: hen wordt aangeraden dit hoofdstuk alleen onder begeleiding van een professionele wiskundige te lezen.

Voor een schalingslimiet sturen we de grootte van de hexagons naar nul, laat daarom  $\delta$  de grootte van een hexagon aangeven (bijv. de lengte van een zijde van een hexagon). Verder laten we de parameter  $p$ , die de kans op een zwarte hexagon weergeeft, afhangen van de parameter  $\delta$ . Dus bij een rijtje  $\{\delta_n\}$  zodanig dat  $\delta_n \rightarrow 0$  hoort een rijtje  $\{p_n\}$ , waarbij  $p_n$  van  $\delta_n$  afhangt. We geven de kansverdeling van interface curves op het honingraatrooster met schaalgrootte  $\delta$  en percolatieparameter  $p$  aan met  $\mu_{\delta,p}$ . Voor iedere keuze van  $\{\delta_n\}$  en  $\{p_n\}$  convergeert de rij  $\mu_{\delta_n,p_n}$  naar een kansverdeling  $\mu$  op een ruimte van lussen. (Dat wil zeggen, de ruimte van lussen bevat mogelijkheden voor het "uiterlijk" van de lussen en de kansverdeling  $\mu$  kent een kans aan deze mogelijkheden toe.) Dit is een toepassing van een resultaat van Aizenman en Burchard [2]. In Hoofdstuk 3 bewijzen we dat er slechts drie mogelijkheden zijn voor deze kansverdeling  $\mu$  en we geven ook een kwalitatieve beschrijving van deze mogelijkheden.

We laten zien dat de schalingslimiet triviaal, kritisch of bijna-kritisch is. Met een triviale schalingslimiet wordt bedoeld dat alle lussen een diameter van 0 hebben met kans 1. In de kritische schalingslimiet is ieder punt in het platte vlak met kans 1 omringd door oneindig veel lussen, waarvan de diameters willekeurig klein en groot worden. In het bijna-kritische geval is ieder punt in het platte vlak met kans 1 omringd door een grootste lus en oneindig veel lussen met willekeurig kleine diameter.

In Hoofdstuk 4 tonen we het bestaan aan van een schalingslimiet voor Voronoi-percolatie, onder een (heel natuurlijke) aanname. Het Voronoi-percolatie-model wordt via een andere procedure verkregen dan percolatie op het honingraatrooster. In plaats van punten op een rooster werken we met punten verkregen via een stochastisch proces, het zogenaamde Poisson proces. Dit is een verzameling punten in het platte vlak met o.a. de eigenschap dat het verwachte aantal punten in een gebied proportioneel is aan de oppervlakte van het gebied en dat deze punten uniform verdeeld zijn binnen dit gebied. Laat  $\mathcal{P}$  zo'n Poisson proces zijn. Ieder punt  $x$  uit  $\mathcal{P}$  krijgt via de inmiddels bekende percolatiemethode een kleur: met

kans  $p$  wordt  $x$  zwart, met kans  $1 - p$  wit, onafhankelijk van andere punten. Voor ieder Poisson punt  $x$  bepalen we welke punten  $y$  uit het platte vlak dichterbij  $x$  dan bij andere Poisson punten liggen. Deze punten vormen de Voronoicel van  $x$  en we geven ieder punt in de Voronoicel van  $x$  dezelfde kleur als  $x$ , zie Figuur 6.6 voor een illustratie.



Figuur 6.6: Voorbeeld van Voronoipercolatie. De punten stellen de Poisson punten voor en de lijnen zijn de grenzen van de Voronoicellen.

Als we wederom Voronoicellen van dezelfde kleur met elkaar verbinden verkrijgen we zwarte en witte clusters. Ook interface curves zijn in Voronoipercolatie de curves tussen witte en zwarte clusters in. Een Poisson proces wordt geparametriseerd door de intensiteitsparameter  $\lambda$ : hoe hoger  $\lambda$  hoe hoger het verwachte aantal punten in een gebied. Het is duidelijk dat als  $\lambda$  groeit de Voronoicellen kleiner worden. We geven de kansverdeling van interface curves in Voronoipercolatie met parameter  $\lambda$  dan ook aan met  $\mu_\lambda$ . In Hoofdstuk 4 bewijzen we een eigenschap voor  $\mu_\lambda$ , onder een zekere aanname voor Voronoipercolatie, en uit deze eigenschap volgt het bestaan van een kansverdeling  $\mu$  als limiet van  $\mu_\lambda$ .

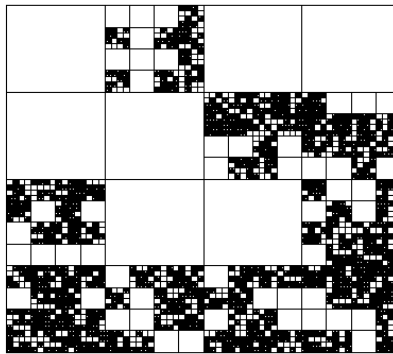
De Franse wiskundige Benoît Mandelbrot introduceerde het begrip fractal in zijn monumentale boek *The fractal geometry of nature*. Fractal is afgeleid van het Latijnse woord *fractus*, dat gebroken betekent. Mandelbrot vond dat wiskundigen eeuwenlang hun aandacht hadden besteed aan mooie, reguliere objecten terwijl deze objecten niet in het wild voorkomen: bergen zijn geen kegels, wolken geen bollen en kustlijnen geen rechte lijnen, om maar een paar voorbeelden te noemen. Het is daarom veel "natuurlijker" om fractale meetkunde te bestuderen. Dat is een meetkunde waarin "gebroken" objecten met een zekere mate van zelfvormigheid

als uitgangspunt worden genomen, dit zijn de zogenaamde fractals. Simpel gezegd is een object zelfvormig wanneer inzoomen op het object weer (ongeveer) hetzelfde object oplevert. Voorbeelden van fractals in het dagelijks leven zijn broccoli en bloemkool, de Britse kustlijn, riviernetwerken, kristallen en beurskoersen. De wiskundige beschrijving van fractals kent twee hoofdvarianten: deterministische fractals of toevalsfractals. In Hoofdstukken 5 en 6 bestuderen we enkele toevalsfractals.

Het model dat we in Hoofdstuk 5 bestuderen is bedacht door Mandelbrot en wordt daarom wel Mandelbrot fractalpercolatie genoemd. Laat  $d$  en  $N$  twee gehele getallen groter dan of gelijk aan 2 zijn. Bekijk de eenheidskubus  $[0, 1]^d$  (ook in dimensies groter dan drie spreken we over kubus) en deel dit op in  $N^d$  gelijke kubussen (met zijdelengte  $1/N$ ). Voor iedere kubus passen we de percolatieprocedure toe: met kans  $p$  kleuren we het zwart, met kans  $1 - p$  wit, onafhankelijk van andere kubussen. Dit was de eerste stap van de constructie van de fractal. In stap twee herhalen we dezelfde procedure alleen in de zwarte kubussen: iedere zwarte kubus wordt opgedeeld in  $N^d$  gelijke subkubussen (met zijdelengte  $1/N^2$ ) waarna iedere subkubus met kans  $p$  zwart blijft, of met kans  $1 - p$  wit wordt. We blijven dit in iedere zwarte kubus op iedere kleinere schaal herhalen, zie Figuur 6.7 voor een voorbeeld van Mandelbrot fractalpercolatie in dimensie  $d = 2$  tot en met de derde stap. In iedere stap van de fractalconstructie hebben we een verzameling van zwarte kubussen, waarbij de verzameling in stap  $n + 1$  een deelverzameling is van de verzameling in stap  $n$ . We zijn geïnteresseerd in de limietverzameling van de zwarte kubussen. Dat wil zeggen, de verzameling die overblijft wanneer  $n$  willekeurig groot wordt. We noteren deze limietverzameling met  $D_p$ .

Het begrip dimensie van een object zal voor veel mensen een duidelijke (intuïtieve) betekenis hebben: het minimum aantal coördinaten waarmee we een punt van dit object kunnen beschrijven. Een plat vlak heeft twee dimensies en de ruimte om ons heen drie. In de wiskunde zijn er echter talrijke objecten, waaronder fractals, waarvoor dit dimensiebegrip ontoereikend is. We hanteren daarom (vooral) het begrip Hausdorff-dimensie wanneer we over fractals praten. Een precieze definitie kan de enthousiaste lezer in Hoofdstuk 5 vinden. De Hausdorff-dimensie komt in "gewone" ruimtes overeen met het intuïtieve idee van dimensie: de Hausdorff-dimensie van een rechte lijn is 1, van een vierkant 2, etc. Verder geldt dat de Hausdorff-dimensie een mate van fractaliteit is: hoe groter de Hausdorff-dimensie hoe fractaler het object.

De limietverzameling  $D_p$  kan in twee disjuncte verzamelingen worden opge-



Figuur 6.7: Voorbeeld van Mandelbrot fractalpercolatie in twee dimensies tot en met de derde stap van de constructie.

splijt: een totaal onsamenvangende verzameling van louter punten, die ook wel de "stof"-verzameling wordt genoemd, en een verzameling van samenhangende componenten. Simpel gezegd is een component samenhangend als we de component niet kunnen scheiden in twee aparte stukken. Een object is onsamenvangend als dit wel kan. Voorbeelden van samenhangende componenten zijn curves en intervallen. We laten in Hoofdstuk 5 zien dat de Hausdorff dimensie van de samenhangende verzameling kleiner is dan de Hausdorff dimensie van  $D_p$ . In het bijzonder impliceert dit dat de Hausdorff dimensie van de stof-verzameling groter is dan de Hausdorff dimensie van de samenhangende verzameling. Verder bewijzen we dat de verzameling van samenhangende componenten een vereniging is van mooie, gladde curves (Hölder continue curves voor de liefhebbers).

In Hoofdstuk 6 bekijken we twee variaties op het fractal-thema. Laat  $N$  en  $d$  weer twee gehele getallen strict groter dan 1 zijn. Neem een geheel  $k$  tussen 0 en  $N^d$ . De eerste stap van ons nieuwe model, dat  $k$ -fractalpercolatie heet, is als volgt. Deel de eenheidskubus  $[0, 1]^d$  weer op in  $N^d$  kubussen met zijdelengte  $1/N$ . We kiezen nu  $k$  kubussen op een uniforme manier, dat wil zeggen dat alle verzamelingen van  $k$  kubussen gelijke kans hebben om gekozen te worden. De gekozen kubussen kleuren we zwart. Vervolgens herhalen we deze procedure

weer in alle zwarte kubussen en op iedere kleinere schaal. Wederom zijn we geïnteresseerd in de limietverzameling, die we ditmaal met  $D_k$  aanduiden. We definiëren de drempelwaarde  $k_c(N, d)$  als de kleinste waarde  $k$  waarvoor geldt dat de limietverzameling  $D_k$  met positieve kans de linkerkant van de eenheidskubus met de rechterkant verbindt. We definiëren de analoge drempelwaarde  $p_c(N, d)$  voor Mandelbrot fractalpercolatie (deze is uiteraard gedefinieerd in termen van de kansparameter  $p$ ). We bewijzen in Hoofdstuk 6 dat  $k_c(N, d)/N^d$  naar dezelfde (bekende) waarde convergeert als  $p_c(N, d)$ . Het voert te ver om deze waarde hier te introduceren en geïnteresseerde lezer wordt hiervoor naar het desbetreffende hoofdstuk verwezen.

In de andere variant verandert de kansparameter  $p$  per stap in de fractalconstructie. Laat  $p_n$  de kans zijn waarmee we een kubus zwart kleuren in stap  $n$  en neem aan dat  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n > 0$ . We laten zien dat de Lebesgue-maat van de limietverzameling van de fractal die we op deze manier verkrijgen met kans 1 positief is. De Lebesgue-maat is de standaard manier om volume (of oppervlak dan wel lengte) toe te kennen aan verzamelingen. We kunnen de limietverzameling wederom op twee manieren opsplitsen: de stof-verzameling en de verzameling met samenhangende componenten. We bewijzen dat óf de stof-verzameling positieve Lebesgue-maat heeft óf de verzameling met samenhangende componenten, maar niet allebei tegelijk.