Samenvatting

Zandhoopmodellen: het oneindig volume model, Zhang's model en limietvormen.

Dit proefschrift bevat vier artikelen die tot stand gekomen zijn tijdens dit promotieonderzoek, over diverse aspecten van zandhoopmodellen.

Zandhoopmodellen zijn dynamische modellen, die evolueren in discrete tijd. Ze zijn gedefinieerd op een eindig rooster; in dit proefschrift bekijken we alleen het rooster $\mathbb{Z}^d$ en eindige subsets daarvan. Een zandhoopmodel start vanuit een beginconfiguratie die bestaat uit een hoogte, of aantal zandkorrels, op ieder roosterpunt. De beginconfiguratie moet stabiel zijn, dat wil zeggen dat op ieder punt de hoogte onder een bepaalde grenswaarde moet zijn. Een tijdstap bestaat uit een toevoeging en daaropvolgend de stabilisatie. De toevoeging is aan een willekeurig roosterpunt; de hoogte neemt daar toe, meestal met een zandkorrel, maar in Zhang's model bijvoorbeeld met een random hoeveelheid zand. Stabilisatie gebeurt door middel van topplings van instabiele punten: ieder roosterpunt waarvan de hoogte op of boven de grenswaarde is, is instabiel en moet zijn hoogte verminderen door zand aan de naburige punten te geven. Bij een toppling van een punt aan de rand van het rooster verdwijnt er ook zand naar de "ontbrekende buren", d.w.z., over de rand. Toppelen gaat door tot de configuratie weer stabiel is. Dan is de nieuwe configuratie bereikt, en kan de volgende tijdstap beginnen.

Bak, Tang and Wiesenfeld introduceerden een zandhoopmodel als model voor "self-organized criticality". Deze term bedachten ze voor het voorkomen van kenmerken van criticaliteit, zoals zware staart- verdelingen en lange afstand-correlaties, in diverse natuurlijke fenomenen als aardbevingen of bosbranden. In statistische mechanica, waar modellen gedefinieerd zijn in oneindig volume, is criticaliteit goed bekend; de kritische toestand wordt bereikt bij de kritieke waarde van een modelparameter, waar een fase-overgang optreedt. Een voorbeeld van zo'n parameter is de temperatuur in het Ising model. Het idee bij self-organized criticality is dat het model spontaan de kritische toestand bereikt, zonder dat er sprake is van een modelparameter.

De hoofdstukken 2 en 3 van dit proefschrift gaan over het abelse zandhoopmodel. In dit model bestaat een toevoeging uit 1 zandkorrel. Punten met een hoogte van minimaal $2d$ zijn instabiel. Als een punt toppelt verliest het $2d$ korrels en ieder naburig punt krijgt er een bij. Dit zandhoopmodel wordt abels genoemd vanwege de eigenschap dat de bereikte configuratie onafhankelijk is van de volgorde van toppelen.

Het doel in deze hoofdstukken is het vinden van een relatie tussen self-organized criticality in het abelse zandhoopmodel, en criticaliteit zoals bekend uit statistische mechanica. Daartoe hebben we een oneindig volume zandhoopmodel gedefinieerd, waarin een parameter voorkomt. Het idee van deze aanpak is dat we een kritieke waarde van de parameter zoeken, en dan de dynamica van het oorspronkelijke zandhoopmodel interpreteren als een mechanisme wat deze parameter naar de kritieke waarde stuurt.

Dit oneindig volume model start vanuit een -niet noodzakelijk stabiele- beginconfiguratie, gekozen volgens een translatie-invariante beginmaat op het oneindig rooster $\mathbb{Z}^d$. Deze configuratie evolueert in de tijd door het toppelen van instabiele punten. Het kiezen van een toppelvolgorde is nu minder triviaal; in hoofdstuk 3 introduceren we toppelprocedures, dat zijn "toegestane" volgordes. Voor sommige beginconfiguraties is er dan een stabiele eindconfiguratie na maar eindig veel topplings per punt; die noemen we stabiliseerbaar. Voor andere beginconfiguraties blijft het aantal topplings per punt toenemen, welke (toegestane) toppelvolgorde we ook kiezen. We noemen een beginmaat stabiliseerbaar als (vrijwel) iedere configuratie volgens deze maat dat is. Een parameter in dit model is het volgens de beginmaat verwachte aantal korrels per punt, ofwel de dichtheid. We vinden dat beginmaten met dichtheid kleiner dan d altijd, en met dichtheid groter dan $2d-1$ nooit stabiliseerbaar zijn. In hoofdstuk 2 is dit bewezen voor twee specifieke toppelprocedures, in hoofdstuk 3 voor alle. Voor elke dichtheid tussen deze waarden bestaan stabiliseerbare en niet-stabiliseerbare beginmaten. Voor $d = 1$ vallen deze twee waarden samen, in dat geval is er een stabiliseerbaarheids-faseovergang. We bewijzen dat productmaten met de kritieke dichtheid 1 niet stabiliseerbaar zijn. We kijken voor dit model, voor stabiliseerbare beginmaten, ook naar percolatie van punten die getoppeld hebben tijdens stabilisatie. Het blijkt dat als de dichtheid klein genoeg is -maar niet 0-, de clusters van getoppelde punten eindige grootte hebben.

Hoofdstuk 4 gaat over Zhang's model. In dit zandhoopmodel bestaat een toevoeging uit een random hoeveelheid zand, uniform verdeeld op $[a, b] \subseteq [0, 1]$. De grenswaarde voor de hoogte is 1. Als een punt toppelt verliest het zijn gehele hoogte; een fractie $\frac{1}{2d}$ gaat naar elk van de naburige punten. Hoewel voor dit model in principe op elk punt iedere hoogte tussen 0 en 1 voor kan komen, blijkt uit simulaties voor grote roosters, dat de stationaire verdeling voor de hoogte per punt geconcentreerd is rond $2d$ equidistante waarden (alleen in het geval $d = 1$ is er maar een zo'n waarde). Zhang noemde die waarden "quasi-units". Zhang's model is niet abels. Hoofdstuk 4 begint met het introduceren van het model in dimensie 1 op N punten, en een uitgebreide bespreking van overeenkomsten en verschillen met het abelse zandhoopmodel. Het voornaamste resultaat is voor $a \geq \frac{1}{2}$, in de limiet van $N \to \infty$: we bewijzen dat de stationaire verdeling voor de hoogte per punt concentreert rond de waarde $\frac{a+b}{2}$, ofwel, een bevestiging van het bestaan van Zhang's quasi-units voor dit geval. Verder vinden we voor het geval $[a, b] = [0, 1]$, onder enkele aannames, dat de verwachte stationaire hoogte gelijk is aan $\sqrt{1/2}$, en we geven een expliciete uitdrukking voor de stationaire verdeling voor het model op één punt.

Het laatste hoofstuk, hoofdstuk 5, gaat over het abelse zandhoopmodel als deterministisch groeimodel. De beginconfiguratie bestaat uit h zandkorrels op alle punten van $\mathbb{Z}^d$. Als h negatief is, kun je dit voorstellen als een kuiltje op ieder punt waar $|h|$ korrels in passen. Er wordt alleen aan de oorsprong toegevoegd; we kiezen $h \leq 2d - 2$ om ervoor te zorgen dat de topplings binnen een eindig gebied blijven. We zijn geinteresseerd in de vorm het gebied waarover het toegevoegde zand zich verspreidt, en of er een limietvorm bestaat. Voor het gerelateerde rotor-router model [] met $h = -1$ is de limietvorm een bol. Voornaamste resultaten van hoofdstuk 5 zijn: de limietvorm voor het zandhoopmodel met $h = 2d - 2$ is een kubus, de limietvorm voor het rotor-router model is een bol voor elke $h \leq -1$, en de limietvorm voor het zandhoopmodel is een bol als $h \to \infty$.